Análisis Dimensional y Teorema π de Vaschy Buckingham.

Ítalo Sepúlveda Solari
Universidad Autónoma de Chile
Facultad de Arquitectura y Construcción
Correo-e: italo.sepulveda@uautonoma.cl

Resumen: *En esta sección se analiza el procedimiento para realizar un análisis dimensional.*

Introducción.

El análisis dimensional es una herramienta que permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno en el que estén involucradas muchas magnitudes físicas en forma de variables independientes.

Las aplicaciones para el Análisis Dimensional son:

- Detección de errores de cálculo.
- Resolución de problemas cuya solución directa conlleva dificultades matemáticas insalvables.
- Creación y estudio de modelos reducidos.
- Consideraciones sobre la influencia de posibles cambios en los modelos, etc.

1. Principios Básicos.

Para indicar que se está analizando la dimensión, se debe utilizar la nomenclatura; [ ]

Las dimensione primarias son:

- "Masa" = M
- "Longitud" = L
- "Temperatura" = θ
- "Tiempo" = T

Las expresiones numéricas no tienen dimensión, ejemplo:

- [750] = 1
- [4π] = 1
- [Log (n)] = 1

Principio de Homogeneidad

- A+B = C-D , Para que esta expresión sea correcta en términos dimensionales tanto el lado derecho como el izquierdo deben tener la misma dimensión.
- [A + B] = [A] = [B]
- [C – D] = [C] = [D]

Ejemplo 1.1: Uso de Propiedades

Determine las dimensiones de A, para la siguiente expresión

$$A = \frac{\left((B + C) \cdot (P - Q)\right)}{\sin\theta \cdot (R + S)}$$

Donde:

B = Trabajo
Q = Fuerza
S = Presión

Si sabemos que las unidades son las siguientes:

$B = ML^2T^{-2}$
$Q = MLT^{-2}$
$S = ML^{-1}T^{-2}$

Realizamos el análisis dimensional de la expresión, considerando las propiedades ya descritas.

$$[A] = \frac{[B + C] \cdot [P - Q]}{[\sin\vartheta] \cdot [R + S]}$$

$$[A] = \frac{[B] \cdot [Q]}{[S]}$$

$$[A] = \frac{ML^2T^{-2} \cdot MLT^{-2}}{ML^{-1}T^{-2}}$$

$$[A] = \frac{M^2L^3T^{-4}}{ML^{-1}T^{-2}}$$

$$[A] = M^{(2-1)}L^{(3+1)}T^{(-4+2)}$$

$$\boldsymbol{[A] = ML^4T^{-2}}$$

Ejemplo 1.2: Uso de Propiedades

En la siguiente expresión determine x + y + z

$$F = A^y \cdot B^x \cdot C^z$$

Donde:

F = Fuerza
$[A] = ML^{-1}T^{-1}$
C = Velocidad
B = Longitudinal

Si sabemos que las unidades son las siguientes:

$F = MLT^{-2}$
$C = LT^{-1}$
$B = L$

Realizamos el análisis dimensional de la expresión, considerando las propiedades ya descritas.

$$MLT^{-2} = (ML^{-1}T^{-1})^y \cdot (L)^x \cdot (LT^{-1})^z$$

$$MLT^{-2} = (M^y L^{-y} T^{-y})(L^x)(L^z T^{-z})$$

$$MLT^{-2} = M^y L^{(-y+x+z)} T^{(-y-z)}$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 1 \\ -y + x + z = 1 \\ -y - z = -2 \end{array}\right|$$

Solucionando el sistema de ecuaciones, obtenemos los siguientes valores:

$$\boldsymbol{y = 1\ ;\ z = 1\ ;\ x = 1}$$

2. Teorema π de Vaschy Buckingham.

El teorema establece que dada una relación física expresable mediante una ecuación en la que están involucradas n magnitudes físicas o variables.

Para aplicar este teorema se deben tener en cuenta el siguiente procedimiento:

- Paso 1: Identificar las variables involucradas, diferenciando la variable que se busca analizar.
- Paso 2: Determinar las dimensiones de cada una de las variables.
- Paso 3: Calculo de Número de Grupos Adimensionales, para ello se debe utilizar la siguiente expresión:
    - N° de Grupos Adimensionales = N° de Variables – N° de Dimensiones
- Paso 4: Escribir las expresiones π_n, mediante la siguiente metodología:
    - $\pi_i = (A_1^{m1} A_2^{m2} \dots \dots \dots A_n^{mn})$
- Paso 5: Solucionar las respectivas ecuaciones, obteniendo los valores “m1, m2…..mn”

Para comprender su aplicación, ver el ejemplo a continuación:

Ejemplo 2.1: Uso de Teorema π de Vaschy Buckingham

Encuentre una ecuación de forma para el flujo del líquido en una tubería para la caída de presión de un liquido en una tubería, sabiendo que depende de la velocidad, viscosidad, densidad del líquido, longitud y diámetro de la tubería.

Además se desea que la viscosidad y la longitud aparezcan una sola vez en dicha ecuación.

Paso 1: Identificar las variables involucradas, diferenciando la variable que se busca analizar.

- Caída de Presión: $-\Delta P = P1-P2$
- Velocidad: v
- Densidad: ρ
- Viscosidad: μ
- Longitud: L
- Diámetro: D

Paso 2: Determinar las dimensiones de cada una de las variables.

Caída de Presión: $-\Delta P = P1-P2$ ------------------------ $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$

Velocidad: V -- $\left[\frac{L}{T}\right]$

Densidad: ρ -- $\left[\frac{M}{LT}\right]$

Viscosidad: μ -- $\left[\frac{M}{L^3}\right]$

Longitud: L --- $[L]$

Diámetro: D --$[L]$

Paso 3: Calculo de Número de Grupos Adimensionales, para ello se debe utilizar la siguiente expresión:

N° de Grupos Adimensionales = N° de Variables – N° de Dimensiones

N° de Variables = 6
N° de Dimensiones = 3
N° de Grupos Adimensionales = 6 – 3 = 3

Paso 4: Escribir las expresiones π_n

$\pi_1 = (V^a, \rho^b, D^c) \quad (-\Delta P)$

$\pi_2 = (V^a, \rho^b, D^c) \quad (\mu)$

$\pi_3 = (V^a, \rho^b, D^c) \quad (L)$

<u>Paso 5:</u> Solucionar las respectivas ecuaciones.

$$\pi_1 = \left(\left(\frac{L}{T}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b L^C\right) \quad \left(\frac{M}{LT^2}\right)$$

- $M: 0 = b + 1$
- $\mathrm{L}: 0 = \mathrm{a} + (-3\mathrm{b}) + \mathrm{c} + (-1)$
- $\mathrm{T}: 0 = -\mathrm{a} - 2$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $\mathrm{b} = -1$
- $\mathrm{a} = -2$
- $\mathrm{c} = 0$

Por lo tanto, la solución de π_1, es:

$\pi_1 = (V^{-2}\rho^{-1}D^0)(-\Delta P)$

$\boldsymbol{\pi_1 = \frac{(-\Delta P)}{\rho V^2}}$

$$\pi_2 = \left(\left(\frac{L}{T}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b L^C\right) \quad \left(\frac{M}{LT}\right)$$

- $M: 0 = b + 1$
- $\mathrm{L}: 0 = \mathrm{a} - 3\mathrm{b} + \mathrm{c} - 1$
- $\mathrm{T}: 0 = -\mathrm{a} - 1$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $\mathrm{b} = -1$
- $\mathrm{a} = -1$
- $\mathrm{c} = -1$

Por lo tanto, la solución de π_2, es:

$\pi_2 = (V^{-1}\rho^{-1}D^{-1})(\mu)$

$\boldsymbol{\pi_2 = \frac{\mu}{V\rho D}}$

$$\pi_3 = \left(\left(\frac{L}{T}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b L^C\right) \quad (L)$$

- $M: 0 = b$
- $\mathrm{L}: 0 = \mathrm{a} - 3\mathrm{b} + \mathrm{c} + 1$
- $\mathrm{T}: 0 = -\mathrm{a}$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $\mathrm{b} = 0$
- $\mathrm{a} = -1$
- $\mathrm{c} = 0$

Por lo tanto, la solución de π_3, es:

$\pi_2 = (V^0\rho^0D^{-1})(L)$

$\boldsymbol{\pi_3 = \frac{L}{D}}$

Finalmente se escribe la expresión:

$$f\left(\pi_{1;}\pi_2;\pi_3\right) = 0$$

$$\boldsymbol{f\left(\frac{(-\Delta P)}{\rho V^2};\frac{\mu}{V\rho D};\frac{L}{D}\right) = 0}$$

Ejemplo 2.2: Uso de Teorema π de Vaschy Buckingham

Se sabe que la velocidad de cauda de una esfera en el seno de un líquido depende del diámetro de la esfera, de su densidad, viscosidad de la esfera, densidad del liquido y de la aceleración de gravedad.

En base a esto se solicita encontrara una ecuación para la velocidad de caída en que la viscosidad y densidad del liquido aparezcan una sola vez.

Paso 1: Identificar las variables involucradas, diferenciando la variable que se busca analizar.

- Velocidad
- Diámetro
- Densidad Esfera
- Viscosidad Liquido
- Densidad Liquido
- Gravedad

Paso 2: Determinar las dimensiones de cada una de las variables.

Velocidad ---$\left[\frac{L}{T^2}\right]$

Diámetro --$[L]$

Densidad Esfera -------------------------------------$\left[\frac{M}{L^3}\right]$

Viscosidad --$\left[\frac{M}{L\theta}\right]$

Densidad Liquido ------------------------------------$\left[\frac{M}{L^3}\right]$

Gravedad --$\left[\frac{L}{\theta^2}\right]$

Paso 3: Calculo de Número de Grupos Adimensionales, para ello se debe utilizar la siguiente expresión:

N° de Grupos Adimensionales = N° de Variables – N° de Dimensiones

N° de Variables = 6
N° de Dimensiones = 3
N° de Grupos Adimensionales = 6 – 3 = 3

Paso 4: Escribir las expresiones π_n

$\pi_1 = \left(\gamma^a, {\rho_{esp}}^b, g^c\right) \quad (V)$

$\pi_2 = \left(\gamma^a, {\rho_{esp}}^b, g^c\right) \quad (d)$

$\pi_3 = \left(\gamma^a, {\rho_{esp}}^b, g^c\right) \quad (\rho_{liq})$

Paso 5: Solucionar las respectivas ecuaciones.

$$f\left(\pi_{1;}\pi_2;\pi_3\right) = 0$$

$$\boxed{\pi_1 = \left(\left(\frac{M}{L\theta}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{L}{\theta^2}\right)^c\right) \quad \left(\frac{L}{\theta^2}\right)}$$

- $M: 0 = a + b$
- $\mathrm{L}: 0 = -\mathrm{a} - 3\mathrm{b} + \mathrm{c} + 1$
- $\theta: 0 = -\mathrm{a} - 2\mathrm{c} - 2$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $\mathrm{b} = 0$
- $\mathrm{a} = 0$
- $\mathrm{c} = -1$

Por lo tanto, la solución de π_1, es:

$\pi_1 = \left(\gamma^0, {\rho_{esp}}^0, g^{-1}\right) \quad (V)$

$\boldsymbol{\pi_1 = \frac{V}{g}}$

$$\pi_2 = \left(\left(\frac{M}{L\theta}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{L}{\theta^2}\right)^c\right) \quad (L)$$

- $M: 0 = a + b$
- $\mathrm{L}: 0 = -\mathrm{a} - 3\mathrm{b} + \mathrm{c} + 1$
- $\theta: 0 = -\mathrm{a} - 2\mathrm{c}$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $\mathrm{b} = 2/3$
- $\mathrm{a} = -2/3$
- $\mathrm{c} = 1/3$

Por lo tanto, la solución de π_2, es:

$\pi_2 = \left(\gamma^{-2/3}, {\rho_{esp}}^{2/3}, g^{1/3}\right) \quad (d)$

$\boldsymbol{\pi_2 = \sqrt[3]{\frac{{\rho_{esp}}^2 g}{\gamma^2}} \cdot d}$

$$\pi_3 = \left(\left(\frac{M}{L\theta}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{L}{\theta^2}\right)^c\right) \quad \left(\frac{M}{L^3}\right)$$

- $M: 0 = a + b + 1$
- $\mathrm{L}: 0 = -\mathrm{a} - 3\mathrm{b} + \mathrm{c} - 3$
- $\theta: 0 = -\mathrm{a} - 2\mathrm{c}$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $\mathrm{b} = -1$
- $\mathrm{a} = 0$
- $\mathrm{c} = 0$

Por lo tanto, la solución de π_3, es:

$\pi_3 = \left(\gamma^0, {\rho_{esp}}^{-1}, g^0\right) \quad (\rho_{liq})$

$\boldsymbol{\pi_3 = \frac{\rho_{liq}}{\rho_{esp}}}$

Finalmente se escribe la expresión:

$$f(\pi_{1;}\pi_2; \pi_3) = 0$$

$$\boldsymbol{f\left(\frac{V}{g}; \sqrt[3]{\frac{{\rho_{esp}}^2 g}{\gamma^2}} \cdot d; \frac{\rho_{liq}}{\rho_{esp}}\right) = 0}$$

Ejemplo 2.3: Uso de Teorema π de Vaschy Buckingham

Encuentre una expresión para el caudal Q, de agua que fluye por un vertedero, sabiendo que depende de la altura H del agua, de la altura P del vertedero y de la aceleración de gravedad g.

Se desea que P aparezca una sola vez en dicha ecuación.

Paso 1: Identificar las variables involucradas, diferenciando la variable que se busca analizar.

- Caudal (Q)
- Altura 1 (H)
- Altura 2 (H)
- Gravedad (g)

Paso 2: Determinar las dimensiones de cada una de las variables.

Caudal -- $\left[\frac{L^3}{\theta}\right]$

Altura 1 -- $[L]$

Altura 2 -- $[L]$

Gravedad -- $\left[\frac{L}{\theta^2}\right]$

Paso 3: Calculo de Número de Grupos Adimensionales, para ello se debe utilizar la siguiente expresión:

N° de Grupos Adimensionales = N° de Variables – N° de Dimensiones

N° de Variables = 4
N° de Dimensiones = 2
N° de Grupos Adimensionales = 4 – 2 = 2

Paso 4: Escribir las expresiones π_n

$\pi_1 = (H^a, g^b) \quad (Q)$

$\pi_2 = (H^a, g^b) \quad (P)$

Paso 5: Solucionar las respectivas ecuaciones.

$$f(\pi_{1;}\pi_2) = 0$$

$$\boxed{\pi_1 = \left((L)^a \left(\frac{L}{\theta^2}\right)^B\right) \quad \left(\frac{L^3}{\theta}\right)}$$

- $L: 0 = a + b + 3$
- $\theta: 0 = -2b - 1$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $b = \frac{1}{2}$
- $a = -\frac{5}{2}$

Por lo tanto, la solución de π_1, es:

$\pi_1 = \left(H^{-\frac{5}{2}}, g^{\frac{1}{2}}\right) \quad (V)$

$$\boldsymbol{\pi_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{H^5}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) Q}$$

$$\pi_2 = \left((L)^a \left(\frac{L}{\theta^2}\right)^B\right) \quad (L)$$

- $L: 0 = a + b + 1$
- $\theta: 0 = -2b$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $b = 0$
- $a = -1$

Por lo tanto, la solución de π_2, es:

$\pi_2 = (H^{-1}, g^0) \quad (V)$

$$\boldsymbol{\pi_2 = \left(\frac{1}{H}\right) P}$$

Finalmente se escribe la expresión:

$$f(\pi_{1;}\pi_2) = 0$$

$$\boldsymbol{f\left(\left(\frac{1}{\sqrt{H^5}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) Q \,;\left(\frac{1}{H}\right) P\right) = 0}$$

Ejemplo 2.4: Uso de Teorema π de Vaschy Buckingham

Encuentre una expresión para el Caudal Q, a partir de las siguientes variables:

- Q
- h
- P
- σ
- μ
- ρ
- g

Donde se desea que la Presión, Esfuerzo y Viscosidad aparezcan una sola vez.

Paso 1: Identificar las variables involucradas, diferenciando la variable que se busca analizar.

Q
h
P
σ
μ
ρ
g

Paso 2: Determinar las dimensiones de cada una de las variables.

- $Q = [L^3\theta^{-1}]$
- $h = [L]$
- $P = [ML^{-1}\theta^{-2}]$
- $\sigma = [M\theta^{-2}]$
- $\mu = [ML^{-1}\theta^{-1}]$
- $\rho = [ML^{-3}]$
- $g = [L\theta^{-2}]$

Paso 3: Calculo de Número de Grupos Adimensionales, para ello se debe utilizar la siguiente expresión:

N° de Grupos Adimensionales = N° de Variables – N° de Dimensiones

N° de Variables = 7
N° de Dimensiones = 3
N° de Grupos Adimensionales = 7 – 3 = 4

Paso 4: Escribir las expresiones π_n

$\pi_1 = (H^a, \rho^b, g^c) \quad (Q)$

$\pi_2 = (H^a, \rho^b, g^c) \quad (P)$

$\pi_3 = (H^a, \rho^b, g^c) \quad (\sigma)$

$\pi_4 = (H^a, \rho^b, g^c) \quad (\mu)$

Paso 5: Solucionar las respectivas ecuaciones.

$$f(\pi_{1;}\pi_2; \pi_3; \pi_4) = 0$$

$\pi_1 = ((L)^a (ML^{-3})^b (L\theta^{-2})^c) \quad (L^3\theta^{-1})$

- $\mathrm{M}: 0 = 0 + \mathrm{b} + 0 + 0$
- $\mathrm{L}: 0 = \mathrm{a} - 3\mathrm{b} + \mathrm{c} + 3$
- $\theta: 0 = 0 + 0 - 2\mathrm{c} - 1$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $b = 0$
- $a = -\frac{5}{2}$
- $c = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto, la solución de π_1, es:

$$\pi_1 = \left(H^{-\frac{5}{2}}, \rho^0, g^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (Q)$$

$$\boldsymbol{\pi_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{H^5}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) Q}$$

$$\pi_2 = ((L)^a (ML^{-3})^b (L\theta^{-2})^c) \quad (ML^{-1}\theta^{-2})$$

- $M: 0 = 0 + b + 0 + 1$
- $L: 0 = a - 3b + c - 1$
- $\theta: 0 = 0 + 0 - 2c - 2$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $b = -1$
- $a = -1$
- $c = -1$

Por lo tanto, la solución de π_2, es:

$$\pi_2 = (H^{-1}, \rho^{-1}, g^{-1}) \quad (P)$$

$$\boldsymbol{\pi_2 = \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{g}\right) P}$$

$$\pi_3 = ((L)^a (ML^{-3})^b (L\theta^{-2})^c) \quad (M\theta^{-2})$$

- $M: 0 = 0 + b + 0 + 1$
- $L: 0 = a - 3b + c + 0$
- $\theta: 0 = 0 + 0 - 2c - 2$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $b = -1$
- $a = -2$
- $c = -1$

Por lo tanto, la solución de π_3, es:

$$\pi_3 = (H^{-2}, \rho^{-1}, g^{-1}) \quad (\sigma)$$

$$\boldsymbol{\pi_3 = \left(\frac{1}{H^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{g}\right) \sigma}$$

$$\pi_4 = ((L)^a (ML^{-3})^b (L\theta^{-2})^c) \quad (ML^{-1}\theta^{-1})$$

- $M: 0 = 0 + b + 0 + 1$
- $L: 0 = a - 3b + c - 1$
- $\theta: 0 = 0 + 0 - 2c - 1$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

- $b = -1$
- $a = -\frac{2}{3}$
- $c = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto, la solución de π_4, es:

$$\pi_4 = \left(H^{-\frac{2}{3}}, \rho^{-1}, g^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (\mu)$$

$$\boldsymbol{\pi_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{H^3}} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}\right)\mu}$$

Finalmente se escribe la expresión:

$$f\left(\pi_{1;}\pi_2; \pi_3; \pi_4\right) = 0$$

$$\boldsymbol{f\left(\left(\frac{1}{\sqrt{H^5}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) Q\,; \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{g}\right) P; \left(\frac{1}{H^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{g}\right) \sigma; \left(\frac{1}{\sqrt{H^3}} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}\right) \mu\right) = 0}$$

Ejemplo 2.5: Comprobación de N° de Reynolds (Adimensional)

Calcular Reynolds y compruebe que es adimensional; para el flujo de agua a 20[°C], viscosidad dinámica del fluido de 1[cp], considera que la tubería tiene un diámetro interno de 2[pulg] y la velocidad del fluido es 3[m/s]

$$Re = \frac{Dv\rho}{\mu}$$

Análisis de variables: (Todo trabajado en sistema MKS)

- $D = Diametro = 2[pulg] = 0.0508[m]$
- $v = 3\left[\frac{m}{s}\right]$
- $\rho = 1000\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
- $\mu = 1[cp] = 0.0010\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]$

$$Re = \frac{0.0508[m]\cdot 3\left[\frac{m}{s}\right]\cdot 1000\left[\frac{kg}{m^3}\right]}{0.0010\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]} = 152.400 = \mathbf{1.524\cdot 10^5}$$

$$Re = \frac{[m]\cdot\left[\frac{m}{s}\right]\cdot\left[\frac{kg}{m^3}\right]}{\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]} = \frac{\left[\frac{m^2}{s}\right]\cdot\left[\frac{kg}{m^3}\right]}{\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]} = \frac{\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]}{\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]} = [-]\ \textbf{(Adimensional)}$$

Referencias

[1] Apuntes Curso Mecánica de Fluidos.